# Dźwięczące liczby

**Materiały:**

- komputer z dostępem do internetu oraz projektor lub telewizor,
- instrument do prezentacji dźwięków i interwałów (pianino, fortepian, keyboard, gitara lub inny),
- prezentacja w formacie pttx,
- kawałki cienkiej gumki krawieckiej długości ok. 20 cm (albo poprzecinane gumki recepturki) w ilości odpowiadającej połowie liczby uczniów w klasie,
- przygotowane następujące nagrania z Kanonu Muzykoteki:

- Guillaume Dufay *Nuper rosarum flores*

- Johann Pachelbel *Kanon*

- Anton Webern *Wariacje na fortepian* op. 27

- Yannis Xenakis *Metastasis*

- nagrania (dostępne w internecie):

- Gérard Grisey *Partiels*

- Jan Sebastian Bach *Contrapunctus XV (Canon per Augmentationem in Contrario Motu)* z *Kunst der Fuge*

- Johannes Ciconia *Le ray au soleyl*

- Guillaume de Machaut *Ma fin est mon commencement*

**Przebieg lekcji:**

1. Natchnienie czy obliczenia?

- Lekcję zaczynamy od zadania uczniom pytania: skąd bierze się muzyka w głowie kompozytora? SLAJD NR 1 Z wypowiedzi uczniów wyłapujemy słowo „natchnienie", wspólnie próbujemy ustalić, czym ono jest, po czym konkludujemy, że bez niego żadna muzyka nie może powstać.
- Uświadamiamy uczniom, że właśnie odtworzyliśmy paradygmat romantyczny, który wcale nie jest i nie był zawsze taki oczywisty. Czy uczniowie np. zastanawiali się kiedyś, co właściwie robi muzyka w *quadrivium*? Przypominamy sobie wspólnie średniowieczny podział sztuk wyzwolonych SLAJD NR 2 i 3 i próbujemy odpowiedzieć na zadane pytanie.

2. Pitagoras

- Wyjaśniamy, że przed wiekami pogląd na istotę muzyki był skrajnie odmienny od naszego dzisiejszego intuicyjnego jej pojmowania, uwarunkowanego romantycznie. Kategoria „natchnienia" nie istniała – muzyka była wiedzą ścisłą, której fundament stanowiły liczby i proporcje. Niekwestionowanym autorytetem w tej dziedzinie był... Pitagoras SLAJD NR 4, który odkrył liczbowe odpowiedniki odległości między dźwiękami (czyli tzw. interwałów).
- Podkreślamy, że było to odkrycie czegoś, co rzeczywiście istnieje w przyrodzie, a nie czysta spekulacja, w razie gdyby jednak były w tej kwestii jakieś wątpliwości, proponujemy uczniom eksperyment. Rozdajemy gumki krawieckie (lub przecięte recepturki) – po jednej na parę. Jeden z uczniów z każdej pary powinien teraz chwycić końce gumki w ręce i ją dość mocno rozciągnąć, natomiast drugi ma naciągniętą gumkę szarpnąć. Słychać dźwięk? Starajmy się go zapamiętać. Teraz uczeń trzymający naciągniętą gumkę niech umieści ją tuż nad ławką (0,5-1 cm), nie zmieniając jej długości, zaś drugi niech przyciśnie ją palcem do ławki w połowie długości, a następnie szarpnie jedną z połówek. Znowu słychać dźwięk, ale jak się on ma do dźwięku, który wydaje cała gumka (bez przyciskania palcem)? Prosimy o wydobywanie tych dwóch dźwięków (cała długość – połowa długości) na zmianę. Na czym polega różnica?
- Uczniowie zauważyli z pewnością, że jeden dźwięk jest niższy, a drugi wyższy. Wyjaśniamy, że taka właśnie

odległość między dźwiękami (odpowiadająca ośmiu białym klawiszom na klawiaturze) nosi nazwę oktawy (prezentujemy przykładowe oktawy na instrumencie), a my – idąc śladami Pitagorasa – właśnie ustaliliśmy matematyczny jej odpowiednik, czyli 1:2 (stosunek brzmienia jednej połówki do dwóch, czyli całości) SLAJD NR 5. Spróbujemy dalej? Prosimy więc uczniów o dociśnięcie gumki tym razem w 2/3 długości i szarpnięcie dłuższego jej fragmentu – otrzymamy inny dźwięk, też wyższy od dźwięku całej „struny", ale nie tak wysoki jak ten, który uzyskaliśmy przez szarpnięcie połowy gumki. Wyjaśniamy, że taki interwał – odpowiadający pięciu białym klawiszom na klawiaturze – nosi nazwę kwinty (gramy przykładowe kwinty na instrumencie) i że jej ścisły matematyczny odpowiednik wyraża się proporcją 2:3 (brzmienie dwóch cząstek w stosunku do trzech, czyli całości) SLAJD NR 6. Eksperyment można kontynuować w zasadzie w nieskończoność i w ten sposób znaleźć dokładne matematyczne odpowiedniki praktycznie wszystkich odległości między dźwiękami. Czy zgadzamy się więc z tezą, że w samej naturze dźwięku tkwi już matematyka?

3. Widmo dźwięku

- Tak naprawdę matematyki jest w dźwiękach więcej, niż nam się wydaje. Przypomnijmy, że źródłem dźwięku jest jakiś drgający obiekt, np. struna SLAJD NR 7. Im szybciej drga, tym wyższy dźwięk generuje, stąd wysokość pojedynczego dźwięku możemy wyrazić za pomocą fizycznej jednostki, jaką jest herc. Im więcej herców, tym większa częstotliwość drgań i tym wyższy dźwięk. Ten dźwięk np. (gramy $a^1$) ma 440 Hz, natomiast ten (gramy $a^2$) – 880 Hz SLAJD NR 8.
- Ale to nie koniec dźwiękowej matematyki. Otóż w każdym zagranym przez nas dźwięku tkwią inne, niesłyszalne dźwięki, zwane alikwotami SLAJD NR 9. W tym momencie uczniowie mogą już stracić cierpliwość, bo co to za dźwięki, których nie słychać? Wyjaśniamy, że nie słychać ich, bo są bardzo ciche w porównaniu z tym podstawowym, słyszalnym, ale przy użyciu odpowiedniej aparatury można je zidentyfikować i sprawić, by były słyszalne. Zestawione wszystkie naraz brzmią bardzo ciekawie, o czym się za chwilę przekonamy, natomiast najciekawsze jest to, że tworzą ścisłą matematyczną strukturę – częstotliwość każdego następnego alikwotu jest kolejną całkowitą wielokrotnością częstotliwości dźwięku podstawowego (tego słyszalnego). Spróbujmy obliczyć częstotliwość kolejnych alikwotów przykładowego dźwięku, którego częstotliwość wynosi 100 Hz. A zatem 2. alikwot będzie miał 2 x 100 = 200 Hz, 3. alikwot 3 x 100 = 300 Hz, 4. alikwot 4 x 100 = 400 Hz itd. SLAJD NR 10
- Dodajmy tylko, że w naturalnie zagranym dźwięku alikwoty nie pojawiają się wszystkie naraz, tylko z pewnymi opóźnieniami, których długość zależy już od tego, jaki instrument gra, który konkretnie dźwięk, z jaką głośnością itp. Utwór, którego fragment teraz usłyszymy, powstał z inspiracji tą właściwością dźwięku – poszczególne instrumenty orkiestry będą wcielały się w kolejno pojawiające się alikwoty bardzo niskiego dźwięku puzonu. Kompozycja nosi tytuł *Partiels* (czyli: alikwoty), a jej autorem jest Gérard Grisey SLAJD NR 11, jeden z głównych reprezentantów tzw. spektralizmu SLAJD NR 12, XX-wiecznego (ale wciąż ważnego dla dzisiejszej muzyki) nurtu inspirowanego alikwotową strukturą dźwięku. Prezentujemy nagranie (dostępne w internecie), zachęcając do uważnego wsłuchania się w tę niezwykłą muzykę – tak właśnie brzmią matematyczne struktury ukryte w dźwięku!

4. Muzyczne szyfry

- Ktoś jednak mógłby słusznie zauważyć, że cała ta matematyka dotyczy tylko właściwości pojedynczych dźwięków lub interwałów, tymczasem narracja muzyczna rządzi się swoimi prawami, które z liczbami mają z pewnością niewiele wspólnego. Wyjaśniamy, że w wielu wypadkach jest to prawda, jednak zdarzają się utwory, w których konstrukcji liczby odgrywają ogromną rolę. Co ciekawe, bywało że twórcy takich utworów bynajmniej się tym nie chwalili i stosowane przez nich struktury wychodziły na jaw dopiero po wielu latach żmudnych analiz przypominających łamanie wojennych szyfrów SLAJD NR 13.
- W tego typu intelektualnych łamigłówkach celowali zwłaszcza kompozytorzy niderlandzcy XV i XVI w. – np. podstawiając pod litery alfabetu kolejne liczby naturalne, otrzymywali liczbowe zamienniki swoich (lub czyichś) imion i nazwisk, po czym operując tymi właśnie liczbami, tworzyli tematy – czyli główne melodie – utworów (o ściśle określonej liczbie nut) lub wyznaczali liczbę ich powtórzeń. W analogiczny sposób szyfrowali w kompozycji jakieś ważne daty czy nawet architektoniczne proporcje wybranej budowli, czego przykładem jest słynny motet *Nuper rosarum flores* Guillaume'a Dufaya skomponowany z okazji poświęcenia katedry Santa Maria del Fiore we Florencji SLAJD NR 14 – uważa się, że proporcje 6:4:2:3, zgodnie z którymi ustanowione są miary metryczne poszczególnych części utworu, ściśle odpowiadają architektonicznym proporcjom katedralnej kopuły (choć niektórzy muzykolodzy mają na ten temat odmienne zdanie). Posłuchajmy fragmentu tego matematycznego dzieła.

5. O kanonach, czyli nie tylko *Panie Janie*

- Motet Dufaya był utworem bardzo poważnym i uroczystym, czy jednak matematycznych struktur można by się spodziewać w utworze tak lekkim i radosnym jak – być może znane uczniom – dzieło Johanna Pachelbela SLAJD NR 15, którego za chwilę wysłuchamy (tytułu na razie nie zdradzamy)? Po nagranie sięgamy do Kanonu Muzykoteki Szkolnej, zaś po jego wysłuchaniu pytamy uczniów o spostrzeżenia – czy zauważyli coś szczególnego? Jeśli nie są pewni, o co mogłoby nam chodzić, prezentujemy początkowy fragment partytury SLAJD NR 16, prosząc o przyjrzenie się wejściom kolejnych skrzypiec – wniosek: są identyczne. Wyjaśniamy, że do samego końca utworu nic się pod tym względem nie zmienia – skrzypce II powtarzają bez najmniejszych zmian melodię skrzypiec I, a tę znów skrzypce III. Całość jest ścisła do bólu i nie ma tam ani jednej przypadkowej nuty! Tak właśnie funkcjonuje kanon SLAJD NR 17 – jedna z najbardziej kunsztownych i „matematycznych" z natury form muzycznych. Znamy z pewnością kilka prostych kanonów (*Panie Janie*), w tym przypadku jednak powtarzana melodia trwa kilka minut i wszystko w każdym momencie musi się zgadzać w trzech głosach, nie kolidując w dodatku z czwartym – najniższym, który co prawda udziału w kanonie nie bierze, ale sam w sobie jest „matematycznie" interesujący, bo jego melodia – jak być może niektórzy zauważyli – powtarza się w kółko.

- Napisanie kanonu jest rzeczą wystarczająco trudną, by wielu kompozytorów zniechęcić do sięgania po tę formę, na tym większy szacunek zasługują więc ci, którzy poprzeczkę ustawiają sobie wyżej, każąc np. drugiemu głosowi melodię powtarzać nie tak samo, lecz... w zwierciadlanym odbiciu, czyli melodia, która w oryginale idzie do góry, tu zmierza w dół, i na odwrót SLAJD NR 18 (gramy na instrumencie przykład inwersji ze slajdu – każdy głos osobno). Niemożliwe, by stosując tak karkołomne zabiegi, otrzymać muzykę nadającą się do słuchania? No to skomplikujmy sobie życie jeszcze bardziej – niech dźwięki w drugim głosie będą dwa razy dłuższe niż w melodii wyjściowej. Taką odmianą matematyki stosowanej zajmował się m.in. Jan Sebastian Bach (którego najnowsza monografia ma znamienny podtytuł *Muzyk i uczony*), a oto jeden z kanonów, które napisał dokładnie według tego przepisu – prezentujemy dostępne w internecie nagranie kanonu zatytułowanego *Contrapunctus XV* z *Kunst der Fuge* SLAJD NR 19.
- Jak się podobał taki matematyczny kanon? Na tym, oczywiście, możliwości arytmetycznych przekształceń się nie kończą: oto przed nami kanon trzygłosowy, w którym dźwięki drugiego głosu są o połowę dłuższe niż pierwszego, a w trzeciego – dwukrotnie dłuższe (to zresztą nie jedyna interpretacja tego matematycznego kanonu – zagadki, proporcje można ustawić na kilka jeszcze innych sposobów). To już czysta matematyka, posłuchajmy tak właśnie skonstruowanego utworu *Le ray au soleyl* (czyli *Promienie słońca*) Johannesa Ciconii SLAJD NR 20.
- I na koniec tego krótkiego przeglądu kanonicznych sztuczek jeszcze jedno dzieło z gatunku niemożliwych do skomponowania, a jednak istniejących: *Ma fin est mon commencement* (*Mój koniec jest początkiem mym*) Guillaume'a de Machaut. Utwór jest przeznaczony na trzy głosy: głos środkowy powstał przez... przepisanie głosu górnego od końca do początku, zaś głos środkowy zaśpiewany od początku do końca i od końca do początku brzmi identycznie. Prezentujemy nagranie (dostępne w internecie) SLAJD NR 21.

6. Symetrie, permutacje i paraboloidy

- Guillaume de Machaut w swym utworze zastosował więc struktury zwierciadlane (lustro ustawiając tym razem pionowo), a na efekty działania takiego narzędzia matematyka ma swoje określenie: jest nim – prosimy uczniów o podpowiedź – oczywiście symetria. Pamiętając o niej, przyjrzyjmy się teraz kompozycji reprezentującej jedno z najbardziej zmatematyzowanych zjawisk muzyki XX wieku, czyli dodekafonię SLAJD NR 22. Sam opis tej techniki kompozytorskiej zawiera sporo matematycznej terminologii. Podstawą utworu dodekafonicznego jest szereg dwunastodźwięków, czyli tzw. seria, która poddawana jest rozmaitym bardzo ścisłym przekształceniom (zwanymi niekiedy permutacjami) – w całości lub we fragmentach SLAJD NR 23.
- Spróbujmy przyjrzeć się początkowemu fragmentowi *Wariacji fortepianowych op. 27* Antona Weberna, jednego z najwybitniejszych przedstawicieli tej techniki kompozytorskiej. Jego podejście do dodekafonii było bardzo specyficzne – rzadko operował całą dwunastodźwiękową serią, częściej fragmentami. SLAJD NR 24 W górnej części slajdu widzimy fragment partytury jego najsłynniejszego chyba utworu, poniżej – serię, na której utwór jest oparty. Odczytujemy nazwy kolejnych dźwięków: e-f-cis-es-c-d, i następnie odnajdujemy je w prawej ręce w t. 1-3. Po czym w t. 5-7 odczytujemy te same dźwięki, ale w odwrotnej kolejności. Zwracamy uwagę, że tę symetrię naprawdę widać – porównujemy wizualnie grupy nut (wciąż w prawej ręce): t. 3 z t. 5 oraz 1-2 i 6-7. W podobny sposób analizujemy prezentujemy pierwsze takty lewej ręki, w której seria wykorzystana jest od końca (w raku). Jeżeli mamy więcej czasu, możemy w podobny sposób przyjrzeć się kolejnym fragmentom partytury. Po tej prezentacji słuchamy nagrania *Wariacji* op. 27 *(w całości lub we fragmencie) z zasobów Kanonu Muzykoteki – czy słychać było te początkowe symetrie?*
- *W ślady Weberna i jego kolegów poszło bardzo wielu inny*ch kompozytorów, którzy od końca lat 40. po dziś dzień spotykają się co roku na Letnich Kursach Nowej Muzyki w Darmstadt SLAJD NR 25. To właśnie tam jest mekka tych twórców, dla których w procesie komponowana ważna jest matematyka – nieraz zdarzało się, że podczas wykładów tablice częściej zapełniały się tam liczbami, wzorami i wykresami niż nutami. W latach 60. ważną postacią tego nurtu awangardy był grecki kompozytor i architekt Yannis Xenakis SLAJD NR 26, autor orkiestrowego *Metastasis*. Twórca nie operuje tu wyraźnymi melodiami, lecz tzw. masami dźwiękowymi, do których

zorganizowania wykorzystał model – uwaga – hiperbolicznej paraboloidy. Kształt ten został wykorzystany później do zbudowania Pawilonu Philipsa na wystawie Expo w Brukseli w roku 1958 SLAJD NR 27. Czy można „usłyszeć kształt”? Spróbujmy – prezentujemy uczniom nagranie z zasobów Kanonu Muzykoteki.

7. Zadanie domowe – jedno z poniższych do wyboru:

- Wysłuchać uważnie fragmentu *Credo* z *Wielkiej mszy h-moll* Jana Sebastiana Bacha (utwór dostępny w Kanonie Muzykoteki) – dzieła porywającego i niewątpliwie natchnionego – i zastanowić się, czy takie, a nie inne następstwo poszczególnych melodii jest tam wyłącznie dziełem natchnienia.
- Dowiedzieć się, czy ciąg Fibonacciego ma jakieś zastosowanie w muzyce.
- Korzystając z muzycznych kolekcji i opracowań dostępnych na stronie Ninateki SLAJD NR 28, ustalić, czy cokolwiek z matematyką i myśleniem strukturami mieli wspólnego Witold Lutosławski i Andrzej Panufnik.

Anna Pęcherzewska-Hadrych